

Développement d'une fonction en série de Fourier.

Par Nicolas Lanchier ¹

1 Séries de Fourier, noyaux de Dirichlet et de Féjer.

DÉFINITION 1.1 — Soient f une fonction L^1 , 2π -périodique et $n \in \mathbb{Z}$. Le n -ième coefficient de Fourier de f , noté $c_n(f)$, est donné par la formule

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

On notera par la suite e_n l'application $t \mapsto e^{int}$.

LEMME 1.2 (RIEMANN-LEBESGUE) — Soient $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{-i\lambda t} dt = 0$$

En particulier, l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un homomorphisme d'algèbre de L^1 dans l'espace c_0 des suites convergeant vers 0. [3], Sect. 4.1

DÉFINITION 1.3 — On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer d'indice N les applications

$$D_N = \sum_{k=-N}^N e_k \quad \text{et} \quad K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$$

Les sommes partielles et les sommes de Féjer d'une fonction $f \in L^1$ sont alors données par les applications

$$S_N(f) = f * D_N = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = f * K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$$

PROPOSITION 1.4 — Soient D l'espace de Dirichlet, $f \in D$ et $P_n = \text{vect}(e_k, -n \leq k \leq n)$. Alors

$$D = P_n \oplus P_n^\perp \quad \text{et} \quad \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k = \pi_n(f)$$

où π_n désigne la projection orthogonale de f sur P_n . [1], Sect. 4.5

THÉORÈME 1.5 (ÉGALITÉ DE BESSEL-PARSEVAL) — Si f vérifie les conditions de Dirichlet alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge. De plus,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

[1], Sect. 4.5

¹ Tout usage commercial, en partie ou en totalité, de ce document est soumis à l'autorisation explicite de l'auteur.

2 Étude de la convergence.

THÉORÈME 2.1 — Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} . [1], Sect. 4.5

THÉORÈME 2.2 (WEIERSTRASS) — L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.3 (FÉJER) — Si f est continue et 2π -périodique alors

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$$

De même, si f est dans L^p , $1 \leq p < \infty$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.4 (CONTRE-EXEMPLE DE FÉJER) — Soient $(n_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers > 0 et $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels > 0 vérifiant les conditions

$$n_{k+1} > 3n_k \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \log n_k = +\infty$$

Posons

$$P_k(x) = e^{2in_k x} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\sin(jx)}{j} \quad \text{et} \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k$$

Alors la série de Fourier de f ne converge pas vers f . [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.5 — L'ensemble des fonctions f continues 2π -périodiques dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est un G_δ dense. [2], Sect. 5.3

3 Exemple d'utilisation des séries de Fourier.

THÉORÈME 3.1 (ÉGALITÉ DE BESSEL-PARSEVAL) — Si f vérifie les conditions de Dirichlet alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge. De plus,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

[1], Sect. 4.5

THÉORÈME 3.2 (INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE) — Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de Jordan C^1 par morceaux, de longueur L , enfermant une surface S . Alors $L^2 \geq 4\pi S$. De plus, $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si γ définit un cercle parcouru une fois. [3], Sect. 4.6

THÉORÈME 3.3 — Soient $T > 0$, $R_T =]0, \pi[\times]0, T[$ et $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Alors il existe une suite réelle b_n , $n \geq 0$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

APPLICATION 3.4 (ÉQUATION DE LA CHALEUR) — Il existe une unique fonction Φ continue sur l'espace produit $[0, \pi] \times [0, T]$ telle que

1. Φ est de classe C^2 et $\partial_x^2 \Phi - \partial_t \Phi = 0$ sur R_T ;
2. pour tout $t \in [0, T]$, $\Phi(0, t) = \Phi(\pi, t)$;
3. et pour tout $x \in [0, \pi]$, $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$. [1], Sect. 5.5

Références

- [1] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. Ellipses, 1994.
- [2] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1995.
- [3] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, 1995.