Espaces complets. Exemples et applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Complétion d'un espace métrique, premières propriétés.

Définition 1.1 — Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'un espace métrique (E,d) est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p, $q \geq n_0$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Exemple 1.2 — Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.

Définition 1.3 — On appelle espace complet tout espace métrique (E,d) dont les suites de Cauchy convergent. Si de plus E est un espace vectoriel normé, on dira que E est un espace de Banach.

Théorème 1.4 (complétion d'un espace métrique) — Soit (E,d) un espace métrique. Alors, il existe un espace métrique noté $\hat{E}$ et une isométrie $i : E \longrightarrow \hat{E}$ tels que $i(E)$ soit dense dans $\hat{E}$ et tels que $\hat{E}$ soit complet. [3], Sect. 1.2

Définition 1.5 — L'espace $\hat{E}$ est le complété de E.

Proposition 1.6 — Si F est un espace de Banach alors l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach. [3], Sect. 1.5

Théorème 1.7 (Riesz-Fischer) — Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach. [1], Sect. 4.2

Proposition 1.8 — Tout fermé d'un espace complet est complet. Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.

Proposition 1.9 — Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème 1.10 (Bolzano-Weierstrass) — Soit (E,d) un espace métrique. Alors E est compact si et seulement si E est complet et précompact. En particulier, tout espace compact est complet. [5], Sect. 5.2

Théorème 1.11 (point fixe) — Soient X un espace complet et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe. [3], Sect. 1.2

Théorème 1.12 (projection sur un convexe fermé) — Etant donnés H un espace de Hilbert, C un convexe fermé de H et $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ appelé projection orthogonale de x sur C tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. De plus, y est caractérisé par la relation

$$\forall\, z \in C \qquad \langle z - y \cdot x - y \rangle \;\leq\; 0$$

2 Utilisation du théorème de Baire.

PROPOSITION 2.1 — Soient E un espace complet et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides de E. Si la suite des diamètres $\delta(F_n) \to 0$ alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton. [3], Sect. 1.2

THÉORÈME 2.2 (BAIRE) — Soit E un espace complet. Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide de E est d'intérieur vide. De façon équivalente, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. [1], Sect. 2.1

APPLICATION 2.3 — Un espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet. [3], annexe A

APPLICATION 2.4 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' est une partie dense de $\mathbb{R}$. [3], annexe A

APPLICATION 2.5 — L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues. [3], annexe A

3 Propriétés des espaces de Banach.

THÉORÈME 3.1 (BANACH-STEINHAÜS) — Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors on a l'alternative suivante :

1. ou bien $\sup_{i\in I} \| T_i \| < +\infty$;
2. ou bien $\sup_{i\in I} \| T_i(x) \| = +\infty$ pour tout x dans à un G_δ dense dans E. [4], Sect. 5.2

APPLICATION 3.2 — L'ensemble des fonctions f continues 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est un G_δ dense. [4], Sect. 5.3

THÉORÈME 3.3 (THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE) — Soient E et F deux espaces de Banach, $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors il existe $C > 0$ telle que $B_F(0, C) \subset T(B_E(0, 1))$. En particulier, T est une application ouverte. [1], Sect. 2.3

THÉORÈME 3.4 (BANACH) — Soient E et F deux espaces de Banach, $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et bijective. Alors T est un homéomorphisme. [1], Sect. 2.3

THÉORÈME 3.5 (THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ) — Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$. [1], Sect. 2.3

APPLICATION 3.6 — Soit V un sous-espace fermé de $C([0, 1], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si toute application $f \in V$ est de classe C^1 alors V est de dimension finie.
2. Si pour tout $f \in V$ il existe des constantes α, $C > 0$ telles que pour tous x, $y \in [0, 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ C|x - y|^\alpha$$

alors V est de dimension finie. [2], Sect. 2.4

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.