

Groupes finis. Exemples et applications.

Par Nicolas Lanchier ¹

1 Groupes finis. Cardinalité.

THÉORÈME 1.1 (LAGRANGE) — Soient G est un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors l'ordre de H divise l'ordre de G : $\text{card}(G) = \text{card}(H)(G : H)$ où $(G : H)$ désigne l'indice de H . [6], Sect. 1.0

APPLICATION 1.2 — Si G est d'ordre p premier alors G est cyclique.

THÉORÈME 1.3 (CAYLEY) — Si G est un groupe fini de cardinal n alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . [6], Sect. 1.4

THÉORÈME 1.4 (ÉQUATION AUX CLASSES) — Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble X fini et Λ un système de représentants des G -orbites de X . Alors

$$\text{card}(X) = \sum_{x \in \Lambda} \text{card}(O(x)) = \sum_{x \in \Lambda} \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(S(x))}$$

APPLICATION 1.5 — Un p -groupe G possède des sous-groupes distingués à tous les ordres divisant l'ordre de G . [4], Sect. 1.4

APPLICATION 1.6 (WEDDERBURN) — Tout corps fini est commutatif. [6], Sect. 3.4

PROPOSITION 1.7 — Le groupe des matrices triangulaires supérieures strictes de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{F}_p est un p -sous-groupe de Sylow du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{F}_p)$. [6], Sect. 1.5

THÉORÈME 1.8 (PREMIER THÉORÈME DE SYLOW) — Soient G un groupe fini et p un diviseur premier de $\text{card}(G)$. Alors G contient au moins un p -sous-groupe de Sylow. [6], Sect. 1.5

THÉORÈME 1.9 (SECOND THÉORÈME DE SYLOW) — Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$ avec p premier ne divisant pas m .

1. si H est un p -sous-groupe de G , il existe un p -sous-groupe de Sylow de G contenant H ;
2. les p -sous-groupes de Sylow de G sont conjugués donc leur nombre k divise n ;
3. $k \equiv 1 \pmod{p}$ donc k divise m . [6], Sect. 1.5

2 Groupes abéliens finis.

PROPOSITION 2.1 (LEMME CHINOIS) — Si p et q sont premiers entre-eux alors

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

[6], Sect. 1.6

THÉORÈME 2.2 — Tout groupe abélien fini G est somme directe de p -groupes où p décrit l'ensemble des diviseurs premiers de $\text{card}(G)$. [1], Ch. 3

THÉORÈME 2.3 (KRONECKER) — Tout groupe abélien fini est somme directe de groupes cycliques. [1], Ch. 3

¹ Tout usage commercial, en partie ou en totalité, de ce document est soumis à l'autorisation explicite de l'auteur.

THÉORÈME 2.4 (CAUCHY) — Soit G un groupe abélien fini et p un diviseur premier de $\text{card}(G)$. Alors G contient au moins un élément d'ordre p . [1], Ch. 3

THÉORÈME 2.5 — Tout groupe abélien fini G est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_r$$

tels que pour tout $1 \leq i \leq r-1$, $\text{card}(H_{i+1})$ divise $\text{card}(H_i)$. [1], Ch. 3

APPLICATION 2.6 — Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique. [1], Sect. 3.2

3 Formule de Burnside et polyèdres réguliers.

THÉORÈME 3.1 (FORMULE DE BURNSIDE) — Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble X fini et k le nombre de G -orbites de X . Alors

$$k \text{ card}(G) = \sum_{g \in G} \text{card} \text{Fix}(g) \quad \text{où} \quad \text{Fix}(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}$$

[2], Ch. 5

PROPOSITION 3.2 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^2 . [1], Sect. 5.3

PROPOSITION 3.3 — Toute isométrie $g \in O_3^+(\mathbb{R})$, $g \neq \text{id}$, admet exactement deux points fixes x et $-x \in S^2$ appelés pôles de g . [1], Sect. 5.3

THÉORÈME 3.4 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ admet exactement 5 classes de sous-groupes finis :

1. le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des déplacements stabilisant un polygone régulier ;
2. le groupe diédral $D_{n/2}$ des isométries stabilisant un polygone régulier ;
3. le groupe tétraédral \mathfrak{A}_4 des déplacements stabilisant le tétraèdre ;
4. le groupe octaédral \mathfrak{S}_4 des déplacements stabilisant le cube et l'octaèdre ;
5. le groupe icosaédral \mathfrak{A}_5 des déplacements stabilisant le dodécaèdre et l'icosaèdre.

[3], Sect. 1.3

APPLICATION 3.5 — Le nombre N de façons de colorier un cube avec k couleurs distinctes est donné par

$$N = \frac{1}{24} (k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)$$

[5], Sect. 4.3

Références

- [1] Alain Bouvier, Denis Richard. *Groupes. Observation, théorie, pratique*. Hermann, 1994.
- [2] Josette Calais. *Éléments de théorie des groupes*. Puf, 1998.
- [3] M. Fetizon, H.P. Gervais, A. Guichardet. *Théorie des groupes et leurs représentations. Application à la spectroscopie moléculaire*. Ellipses, 1987.
- [4] Hervé Francinou, Serge Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 1*. Masson, 1995.
- [5] Eric Lehman. *Mathématiques pour l'étudiant de première année. Algèbre et géométrie*. Belin, 1984.
- [6] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.