NOMBRES COMPLEXES

Forme Algébrique

$z = x + iy$, x et y réels, $i^2 = -1$ $\quad$ $x = \mathcal{R}e(z)$: partie réelle de z ; $y = \mathcal{I}m(z)$: partie imaginaire de z

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

z réel $\Leftrightarrow y = 0$ $\quad$ et $\quad$ z imaginaire pur $\Leftrightarrow x = 0$

Formes Trigonométrique et exponentielle

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Conjugué

$$\bar{z} = x - iy = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho e^{-i\theta}$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}' \qquad \bar{\bar{z}} = z \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathcal{I}m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

z réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ $\quad$ et $\quad$ z imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

Module

Dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, si M est le point d'affixe z, alors $|z| = OM$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \qquad |z| \in \mathbb{R}_+ \qquad |\cos\theta + i\sin\theta| = |e^{i\theta}| = 1 \text{ pour tout } \theta \text{ réel}$$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \qquad |zz'| = |z||z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$$

Argument

Dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors $\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \\ \text{ou} \\ \text{si } z = x + iy, \text{ on a } \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}\right\} \text{ alors } \arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \qquad \arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

z réel $\Leftrightarrow \arg(z) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ et $\quad$ z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$zz' = \rho\rho'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')) = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Formule de Moivre : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ $\quad$ et $\quad$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad$ et $\quad$ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$