

La droite réelle

Exercice 1

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} .

- (a) Montrer que $A \cup B$ est majorée si, et seulement si, les deux parties A et B sont majorées.
(b) Lorsque A et B sont majorées, prouver

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

- On suppose que A et B sont non vides et majorées et que $A \cap B \neq \emptyset$.
(a) Montrer que $A \cap B$ est majorée et que

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

- (b) Peut-on avoir une inégalité stricte ?

- On pose

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}; \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}.$$

- (a) Prouver que $A + B$ est majorée si, et seulement si, les deux parties A et B sont majorées.
(b) Lorsque A et B sont majorées, prouver

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 2

Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure des parties suivantes de \mathbb{R} .

- $\{x \in \mathbb{Q}^+; x^2 \leq 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbb{N}^*\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = \frac{2y^2 - 27}{5y^2}\}$.

Exercice 3

On appelle nombre *dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 4

Soit D une partie dense de \mathbb{R} .

1. Montrer que si E vérifie $D \subset E \subset \mathbb{R}$, alors E est dense dans \mathbb{R} .
2. Soit F un ensemble fini de \mathbb{R} . Montrer que $D \setminus F$ est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 5

1. Prouver que, si a est un nombre rationnel non nul et si b est irrationnel, les nombres suivants sont tous irrationnels :

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}.$$

2. Prouver par des contre-exemples que la somme de deux nombres irrationnels peut être rationnelle. Même question pour le produit.

Exercice 6

Une partie A de \mathbb{R} est appelée un *ouvert* de \mathbb{R} , lorsque A est vide, ou est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , ou une réunion d'intervalles ouverts de \mathbb{R} .

On dit qu'une partie A de \mathbb{R} est un *fermé* de \mathbb{R} , lorsque $\mathbb{R} \setminus A$ est un ouvert de \mathbb{R} .

1. Montrer que \emptyset et \mathbb{R} sont à la fois des ouverts et des fermés de \mathbb{R} .
2. Montrer que tout intervalle fermé de \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R} .
3. Montrer que ni \mathbb{Q} ni $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont ni des ouverts, ni des fermés de \mathbb{R} .
4. Montrer que toute réunion d'ouverts de \mathbb{R} est un ouvert de \mathbb{R} , et que toute intersection de fermés de \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R} .

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n =] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} [$ et $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert, et une réunion de fermés un fermé ?