

Géométrie affine dans le plan

1 Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . On considère les points A' , B' , C' , D' définis par :

$$\overrightarrow{AA'} = 2.\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BB'} = 2.\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CC'} = 2.\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{DD'} = 2.\overrightarrow{AD}.$$

1. Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.
2. Montrer que son centre est O .

2 Exercice 2

Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes. On note I , J , K , L les milieux respectifs de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$.

Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

3 Exercice 3

Soit ABC un triangle ; A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et G le centre de gravité de ABC , c'est-à-dire, le point défini par : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (propriété fondamentale du centre de gravité).

1. Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2.\overrightarrow{GC'}$. En déduire $G \in (CC')$.
2. Montrer de même que $G \in (AA')$ et $G \in (BB')$. On vient de montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
3. Montrer que G est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

4 Exercice 4

Dans un triangle ABC , on note O , H et G respectivement le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité.

On admettra que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Prouver que O , G et H sont alignés.

5 Exercice 5

Soient D et D' deux droites distinctes ; $A, B, C \in D$; $A', B', C' \in D'$ tel que $(AA') \parallel (BB')$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BB'} = (\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AA'}$ et en déduire qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AA'}$.
2. En écrivant $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}$, prouver que :

$$\overrightarrow{CC'} = \left(\frac{A'C'}{A'B'} - \frac{AC}{AB} \right) \overrightarrow{AB} + \left(1 + \lambda \frac{A'C'}{A'B'} \right) \overrightarrow{AA'}$$

3. En déduire le **théorème de Thalès** :

$$(AA') \parallel (CC') \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$