Dérivation et étude de fonctions

1 Exercice 1

Soit f, la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.
On note C_f la courbe représentative de f.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.
3. Préciser *toutes* les asymptotes à C_f.
4. Tracer soigneusement C_f dans un repère bien choisi.

2 Exercice 2

On défini la fonction $f(x) = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.
2. Calculer les limites de f en 1 et $+\infty$. (*indication :* on pourra multiplier $f(x)$ par $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ et remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = -1$)
3. Déterminer la solution supérieure à 1 de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.
4. Soit α, un réel supérieur à 1 tel que $\alpha - 2\sqrt{\alpha} = 1$. Calculer α en remarquant que $\sqrt{\alpha} = \dfrac{\alpha-1}{2}$ et en élevant au carré.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0^+. Déterminer les variations de f en admettant que f' s'annule en un point unique que l'on précisera et que f' garde un signe constant.

6. Résoudre l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en utilisant la méthode de la question 4). (exprimer $\sqrt{x}$ en fonction de x et élever au carré)

3 Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2+x^2}{1-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
On note C_f la courbe représentative de f.

1. Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{1-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Déterminer les variations et les asymptotes de f.
3. Calculer f'', c'est-à-dire la dérivée de la dérivée de f.
4. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* (resp. *concave*) sur I si et seulement si on a $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$; géométriquement, cela renseigne sur la courbure de C_f. Montrer que f est convexe sur $]-\infty; 1[$ et concave sur $]1; +\infty[$.
5. Tracer C_f.
6. Déterminer tous les points de $\mathbb{R}$ tels que C_f admette une tangente de pente 1.

4 Exercice 4

On considère la fonction polynôme $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 1$.

1. Prouver que f' possède trois racines (ou zéros) distinctes dans $\mathbb{R}$ et en donner une valeur approchée à l'aide d'une machine.
2. En déduire les variations de f.
3. Etudier la convexité de f. (cf. Exercice 3)

5 Exercice 5

1. Trouver une fonction f telle que $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Plus généralement, trouver une fonction g de dérivée $g'(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

3. Expliquer pourquoi, si g est une telle fonction, alors, pour tout réel k, $g+k$ répond encore au problème.
4. En utilisant le tableau des dérivées usuelles, trouver une fonction h telle que $h'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^*$. (attention au signe)
5. Trouver *la* fonction F telle que $F'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $F(2)=1$.