

# Equations polynômiale - Correction

## 1 Exercice 1

1. On calcule le discriminant, on a  $\Delta = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ . D'où les solutions :

$$x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

2. Le discriminant est  $\Delta = -4 < 0$ . Solution :  $\emptyset$ .
3. Tout d'abord, l'écriture de l'équation impose  $x \neq 0$ . Pour  $x$  non nul, l'égalité équivaut à  $x^2 - x + 1 = 0$  qui n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}$ .
4. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \frac{16}{\cos^2 \theta} - 16 = 16 \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 16 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Puisque  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin \theta > 0$  et  $\cos \theta > 0$  (cours de seconde); on en déduit

$$\Delta = \left(4 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 \text{ puis :}$$

$$x \in \left\{ -2 \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}; -2 \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right\}$$

## 2 Exercice 2

1. La somme des coefficients ( $2 - 6 + 4$ ) est nulle, on en déduit que 1 est solution. Le polynôme  $2x^3 - 6x + 4$  est donc divisible par  $x - 1$  et le théorème fondamental de l'algèbre assure l'existence des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifiant :  $2x^3 - 6x + 4 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En développant, il vient :

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

Par identification, on en déduit  $a = 2$ ,  $b - a = 0$ ,  $c - b = -6$  et  $-c = 4$  d'où  $a = b = 2$ ,  $c = -4$ . L'équation devient alors  $2(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$ . Les solutions sont donc :

$$x \in \{1; -2\}$$

2. On pose  $z = x^2$ , on a alors  $z^2 = x^4$  et en remplaçant dans l'équation, on obtient  $z^2 + 2z - 4 = 0$  soit  $z \in \{-\sqrt{5} - 1; \sqrt{5} - 1\}$ .

D'autre part le changement de variable  $z = x^2$  impose  $z \geq 0$ ; la solution  $-\sqrt{5} - 1$  ne convient donc pas et par conséquent,  $z = \sqrt{5} - 1$  et  $x = \sqrt{z}$  ou  $x = -\sqrt{z}$ . Réponse :

$$x \in \left\{ \sqrt{\sqrt{5} - 1}; -\sqrt{\sqrt{5} - 1} \right\}$$

3. La méthode est la même qu'en 1. ;  $x^3 - 2x^2 - 23x + 4$  est divisible par  $x + 4$ , le quotient étant un trinôme du second degré. On trouve :  $x^3 - 2x^2 - 23x + 4 = (x + 4)(x^2 - 6x + 1)$  d'où les solutions :

$$x \in \{-4; 3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\}$$

4. Le changement de variable  $z = x^2 - 8x$  donne  $z^2 + 40z + 375 = 0$  d'où  $z = -15$  ou  $z = -25$ .

On résout ensuite l'équation  $z = x^2 - 8x$  d'inconnue  $x$ , le discriminant est  $\Delta = 64 + 4z$ . Si  $z = -15$  on a  $\Delta = 4 \geq 0$ , si  $z = -25$ , alors  $\Delta = -36 \leq 0$ , il faut donc  $z = -15$  et donc l'équation équivaut à  $x^2 - 8x + 15 = 0$  c'est-à-dire  $x \in \{3; 5\}$ .

### 3 Exercice 3

1. Si 0 était solution, on aurait  $a.0^4 + b.0^3 + c.0^2 + b.0 + a = 0$ , c'est-à-dire  $a = 0$ . Contradiction. Donc 0 n'est pas solution.

2. Puisque 0 n'est pas solution, on a  $x \neq 0$  et donc, on peut factoriser par  $x^2$ , on obtient :

$$x^2 \left( ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} \right) = 0$$

puis on simplifie par  $x^2$  et on regroupe les  $a, b$  et  $c$  :

$$a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

3. On pose  $z = x + \frac{1}{x}$ , on a alors :

$$z^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

En reportant dans l'équation précédente, il vient donc :

$$a(z - 2)^2 + bz + c = 0.$$

4. Il s'agit ici d'une équation symétrique, on pose donc  $z = x + \frac{1}{x}$  et l'égalité devient alors :  $z^2 - 2 - 12z + 37 = 0$  ou encore :  $z^2 - 12z + 35 = 0$  (discriminant 4). D'où  $z = 5$  ou  $z = 7$ .

Il faut à présent trouver  $x$ , le changement de variable équivaut à  $x^2 - zx + 1 = 0$ , équation de discriminant  $z^2 - 4$ .

Pour  $z = 5$  l'équation est  $x^2 - 5x + 1 = 0$  donc  $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$  ou  $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ .

Pour  $z = 7$  l'équation est  $x^2 - 7x + 1 = 0$  donc  $x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$  ou  $x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ .

Finalement les solutions sont :

$$\left\{ \frac{5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}; \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right\}$$