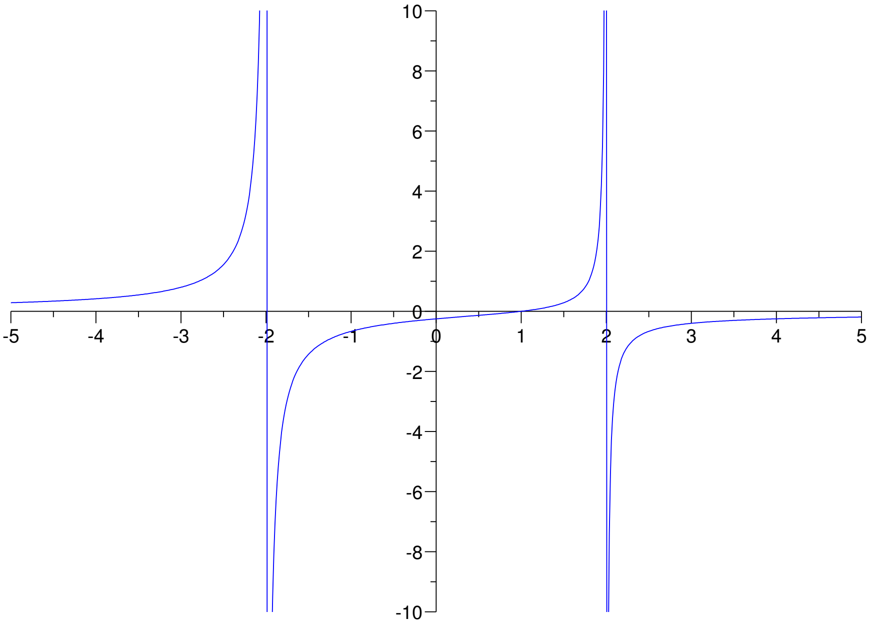
Dérivation et étude de fonctions - Correction

Exercice 1

1. Pour tout x différent de 2 et -2, on a :
   $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{a(x-2)+b(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{(a+b)x+2(b-a)}{x^2-4}$
   d'où, par identification : $a+b=-1$ et $2(b-a)=1$, c'est-à-dire $a = \dfrac{-3}{4}$ et $b = \dfrac{-1}{4}$.
   On a donc : $f(x) = \dfrac{-3/4}{x+2} - \dfrac{1/4}{x-2}$
2. f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire quotient de deux polynômes. Le degré du dénominateur étant supérieur à celui du numérateur, on a :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   On pouvait aussi remarquer que $\lim_{x\to+\infty}(x+2) = \lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3/4}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/4}{x-2} = 0$.
   Limites en 2 et -2 :
   $$\text{On a : } \lim_{x\to2^+}(x^2-4) = 0^+ \text{ et donc } \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$$
   De même, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$
   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}, f'(x) = \frac{-(x^2-4)-2x(1-x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2}$$
   Le signe de f' est donc celui de $x^2-2x+4 = (x-2)^2 \geq 0$, f est donc toujours croissante.
3. Tout d'abord, f ayant des limites infinies aux points 2 et -2, il est clair que C_f possède deux asymptotes d'équations $y=2$ et $y=-2$.
   D'autre part, la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$ étant égale à 0, la droite d'équation $x=0$ est donc asymptote à C_f.
4. graphe de f :



Exercice 2

1. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres x tels que $1-\sqrt{x} \neq 0$ et $x \geq 0$, c'est-à-dire tels que $x \geq 0$ et $x \neq 1$, d'où

$$D_f = \mathbb{R}_+ \backslash \{1\} = [0;1[\cup]1;+\infty[.$$

2. Les limites de $1-\sqrt{x}$ en 1^- et 1^+ étant respectivement 0^+ et 0^-, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

D'autre part :

$$f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}.\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right).(1+\sqrt{x})$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x}) = +\infty$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = 32 = (4\sqrt{2})^2$. Les solutions sont donc $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$; la solution supèrieure à 1 est $3 + 2\sqrt{2}$.
4. Soit $\alpha \geq 1$, on a :

$$\alpha - 2\sqrt{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4\alpha = \alpha^2 + 1 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$$

   On en déduit $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ d'après la question précédente.
5. Pour montrer que f n'est pas dérivable en 0, il faut revenir à la définition du nombre dérivée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x(1-\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{x(1-x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + (1+x)\sqrt{x}}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{1-x} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

   Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{1-x} = 2$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x}{1-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
   On en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

   et donc f n'est pas dérivable en 0.
   Calculons donc la dérivée de f pour tout x positif non nul et différent de 1, il vient :

$$f'(x) = \frac{(1-\sqrt{x}) + (1+x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x}) + 1 + x}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - x + 1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

   D'après la question 4, f' s'annule en $3 + 2\sqrt{2}$ et on admet que c'est la seule valeur qui annule f'.
   D'autre part, on admet que f' garde un signe constant sur son ensemble de définition ; f' est donc, par exemple du signe de $f'(4) = 1/4 > 0$.
   On en déduit que f est croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
6.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - x + 1}{2(1-\sqrt{x})^2} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - x + 1 = 2(1 + x - 2\sqrt{x})$$

   Cette équation revient donc à : $\sqrt{x} = \dfrac{3x+1}{6}$
   En élevant cette égalité au carré, on a donc :

$$x = \left(\frac{3x+1}{6}\right)^2 \Leftrightarrow 36x = 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 1 = 0$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = 864 = (12\sqrt{6})^2$, on en déduit les deux solutions :

$$x \in \left\{ \frac{5+2\sqrt{6}}{3} ; \frac{5-2\sqrt{6}}{3} \right\}$$

qui sont bien toutes deux positives.

Exercice 3

1. On réduit au même dénominateur, il vient :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x} = \frac{(1-x)(ax+b)+c}{1-x} = \frac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{1-x}$$

   On a donc, par identification, $-a = 1$, $a - b = 0$ et $b + c = 2$, d'où $a = b = -1$ et $c = 3$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a :

$$f(x) = \frac{2+x^2}{1-x} = \frac{\frac{2}{x}+x}{\frac{1}{x}-1}$$

   On en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   D'autre part, $(1-x)$ tend vers 0^+ quand x tend vers 1^- et vers 0^- lorsque x tend vers 1^+, on a donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.
   D'après ce qui précède et la question 1, les asymptotes à C_f sont les droites d'équation $x = 1$ et $y = -x - 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \frac{2x(1-x)+(2+x^2)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}$$

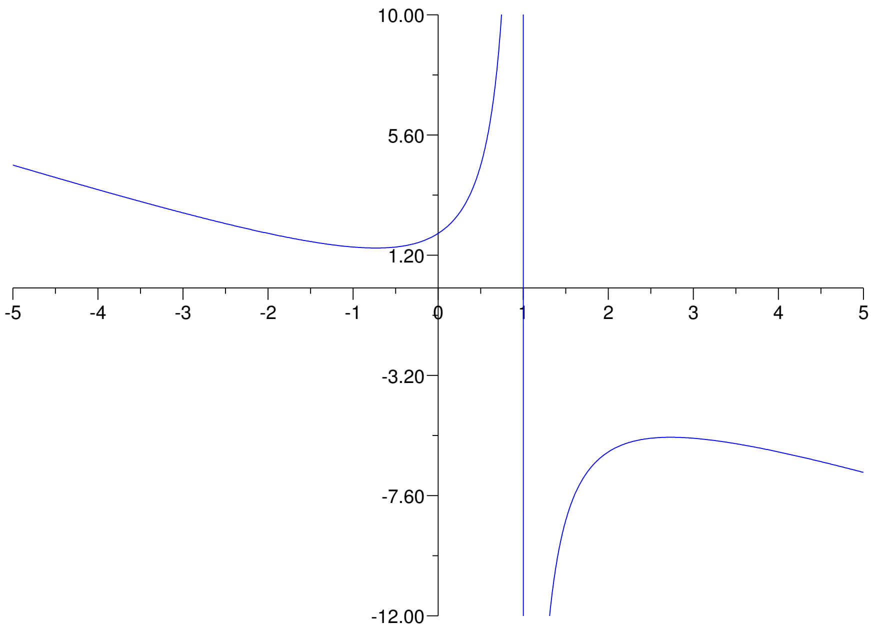
   f' est donc du signe de $-x^2+2x+2$, trinôme de discriminant $12 = (2\sqrt{3})^2$.
   On a donc les variations de f :
   f est croissante sur $]1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}[$;
   f est décroissante sur $]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; +\infty[$.

3. Pour tout x différent de 1 :

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)(1-x)^2-(-x^2+2x+2)(2x-2)}{(1-x)^4} = \frac{2(1-x)((1-x)^2-x^2+2x+2)}{(1-x)^4}$$

   Après simplification : $f''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^3}$

4. On a donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ et donc, f est convexe sur $]-\infty; 1[$ et concave sur $]1; +\infty[$.



5. Graphe de f (ci-dessus)
6. Les points de $\mathbb{R}$ dont la tangente est de pente 1 sont les réels x tels que $f'(x) = 1$, c'est-à-dire $-x^2 + 2x + 2 = (1 - x)^2$, ou encore $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

   Le problème a donc deux solutions qui sont $1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Exercice 4

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 4x^3 - 12x + 4$. Etudions les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
   La dérivée de f' est $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$.On en déduit donc le signe de f'' et les variations de f'.
   Sur $]-\infty; -1[$, f' est strictement croissante, elle établie donc une bijection de $]-\infty; -1[$ sur $f'(]-\infty; -1[) =]-\infty; 12[$; or, $0 \in]-\infty; 12[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty; -1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   De même, il existe $\beta \in]-1; 1[$ et $\gamma \in]1; +\infty[$ tels que $f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$.
   f' possède donc trois racines distinctes ; à la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq -1,88, \beta \simeq 0.35$ et $\gamma \simeq 1.53$.
2. On en déduit :
   f est décroissante sur $]-\infty; \alpha[$,

f est croissante sur $]\alpha; \beta[$,
f est décroissante sur $]\beta; \gamma[$,
f est croissante sur $]\gamma; +\infty[$.

3. Pour étudier la convexité de f il suffit d'étudié le signe de f'', celui-ci a été établi à la queston précédente.
   f est convexe sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et concave sur $]-1; 1[$.

Exercice 5
Pour cet exercice, il n'y a pas encore de méthode systématique mais de l'intuition et un peu de chance !

1. Une fonction recherchée est, par exemple, $f(x) = x^3$.
2. Puisque, lorsqu'on dérive un polynôme, on abaisse son degré d'une unité, on recherche un polyôme de degré $n + 1$. La fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ répond au problème.
3. Si g est telle que $g'(x) = x^n$, on a alors $(g + k)'(x) = g'(x) + 0 = x^n$ et $g + k$ est encore solution.
4. Il fallait trouver $h(x) = -\dfrac{1}{x}$.
5. La fonction h précédente n'est qu'une solution du problème, en fait il existe une infinité de solutions qui sont toutes définies à une constante près ; plus précisément, ce sont les fonctions de la forme $F(x) = -\dfrac{1}{x} + k$ où k est une constante.
   Puisque l'on veut $F(2) = 1$, c'est-à-dire $-1/2 + k = 1$ il faut $k = 3/2$.
   La fonction recherchée est donc $F(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2}$.
   Ce genre de problème sera étudié en terminale.